

1. Общая характеристика методов решения многокритериальных задач. 2. Общая характеристика метода анализа иерархий. 3. Шкала относительной важности. 4. Алгоритм обработки результатов экспертного опроса в методе анализа иерархий. **РАЗДЕЛ №**

3.МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ.

Тема № 4. Принятие решений на основе использования основных теорем и формул теории вероятности.

Практическое занятие4.1

Тема практического занятия «Принятие управленческих решений на основе классической формулы определения вероятности наступления событий».

Учебные вопросы:

1. Принятие решений в условиях неопределенности. Классическая формула теории вероятности.
2. Общая характеристика задач, для решения которых могут быть использованы классическая формула теории вероятности и элементы комбинаторики.

В процессе проведения исследований часто приходится иметь дело со случайными событиями и величинами. Поэтому любой научный работник и преподаватель должен иметь необходимый минимум знаний по теории вероятности и правильно применять эти знания для решения прикладных задач.

Введем основные понятия теории вероятности

Событие. Под событием в ТВ понимается всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Например:

A – появление герба при бросании монеты;

B – появление трех гербов при бросании монеты;

C – попадание в цель при выстреле.

Событие называют достоверным, если в результате опыта оно обязательно произойдет.

Например: выпадение не более шести очков при бросании игральной кости.

Противоположным по отношению к достоверному событию является невозможное событие, т.е. такое событие, которое в данном опыте не может произойти.

Например: выпадение двенадцати очков при бросании игральной кости.

Случайным событием называют событие, которое в результате опыта может произойти или не произойти.

С каждым случайным событием можно связать число, которое тем больше, чем чаще происходит событие. Такое число называют вероятностью события. Таким образом, на основании опыта мы считаем более вероятными те события, которые происходят чаще, менее вероятными те события, которые происходят реже, т.е. понятие вероятности события в своей основе связано с частотой события.

Учитывая изложенное, можно записать:

вероятность достоверного события $P(A)=1$;

вероятность невозможного события $P(B)=0$;

вероятность невозможного события $0 < P(C) < 1$

В общем случае вероятность события можно записать в виде $0 \leq P(A) \leq 1$

Введем следующие понятия.

1. Полная группа событий.

Говорят, что несколько событий в данном опыте образуют полную группу событий, если в результате опыта непременно должно появиться хотя бы одно из них.

Примеры событий, образующих полную группу:

выпадение герба и выпадение решки при бросании монеты;

попадание и промах при выстреле;

появление 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков при бросании игральной кости.

2. Несовместные события.

Несколько событий называются несовместными в данном опыте, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Примеры несовместных событий:

выпадение герба и выпадение решки при бросании монеты;

попадание и промах при выстреле;

появление 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков при бросании игральной кости.

3. Равновозможные события.

Несколько событий в данном опыте называются равновозможными, если по условиям симметрии есть основания считать, что ни одно из этих событий не является объективно более возможным, чем другое.

Примеры равновозможных событий:

выпадение герба и выпадение решки при бросании монеты;

появление карты бубновой, червовой, трефовой масти при вынимании карты из колоды;

появление 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков при бросании игральной кости.

Существуют группы событий, обладающие всеми тремя свойствами: они образуют полную группу, несовместны и равновозможны, например: появление герба и решки при бросании монеты, появление 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков при бросании игральной кости. События, образующие такую группу, называются случаями.

Если исходы опыта образуют полную группу, несовместны и равновозможны, то такие исходы называют случаями и говорят, что такой опыт

сводится к схеме случаев. Для таких опытов возможен непосредственный подсчет вероятностей, основанный на оценке доли так называемых «благоприятных» случаев в общем числе случаев.

На предыдущей лекции мы познакомились со способами непосредственного определения вероятностей, а именно с классической формулой для определения вероятности события

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число исходов, благоприятных событию A ;

n – общее число возможных исходов.

Пример. Пусть в урне 5 белых, 10 синих и 15 красных шаров. Вынимается один шар. Какова вероятность появления событий:

A – при вынимании шара появится белый шар. Число возможных исходов равно 30, благоприятных – 5

$$P(A) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

B – при вынимании шара появится синий шар

$$P(B) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

C – при вынимании шара появится красный шар

$$P(C) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

D – при вынимании шара появится цветной шар

$$P(D) = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

Пример. Имеется колода из 36 карт. Вытаскивается одна карта. Какова вероятность появления событий:

A – появление карты бубновой масти. Число возможных исходов равно 36, благоприятных – 9

$$P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

В – появление туза. Число возможных исходов равно 36, благоприятных – 4

$$P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

С – появление пикового туза. Число возможных исходов равно 36, благоприятных – 1

$$P(C) = \frac{1}{36}$$

Введем еще одно определение. Пусть производится серия из n опытов, в каждом из которых может появиться или не появиться некоторое событие A . Частотой события A или статистической вероятностью события A в данной серии опытов называется отношение числа опытов, в которых появилось событие A , к общему числу произведенных опытов.

Условимся обозначать статистическую вероятность события A (в отличие от математической) знаком $P^*(A)$. Статистическая вероятность вычисляется на основании результатов опыта по формуле

$$P^*(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число появлений события A ;

n – общее число произведенных опытов.

При небольшом числе опытов частота события носит в значительной мере случайный характер и может заметно меняться от одной группы опытов к другой. Например, при каких-то десяти бросаниях монеты вполне возможно, что герб появится только два раза, т.е. частота появления герба равна 0,2; при других десяти бросаниях мы вполне можем получить 8 гербов, т.е. частота будет равна 0,8. Однако при увеличении числа опытов частота события все более теряет свой случайный характер, приближаясь с незначительными колебаниями к некоторой средней постоянной величине. Например, при многократном бросании монеты частота появления герба будет лишь незначительно отклоняться от $\frac{1}{2}$.

Применяя классическую формулу для определения вероятности события необходимо знать количество возможных и благоприятных исходов опыта, что довольно часто является далеко не тривиальной задачей. Для решения этих задач необходимо знать основные элементы комбинаторики. Комбинаторика изучает комбинации, которые можно составить из элементов заданного конечного множества. При непосредственном вычислении вероятностей часто используют формулы комбинаторики. Приведем наиболее употребительные из них.

Прежде всего, напомним понятие факториала, которое часто используется в комбинаторике. Факториалом натурального числа n называется число

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

По определению $0! = 1$; $1! = 1$

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок определяется из выражения:

$$P_n = n!$$

Пример. Пусть имеются три буквы А, В, С. Сколько комбинаций можно составить из этих букв.

Решение. Искомое число комбинаций равно

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \text{ (перечислить их).}$$

Пример. Сколько комбинаций из трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в комбинацию только один раз.

Решение. Искомое число трехзначных чисел равно

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \text{ (перечислить их).}$$

В рассмотренном примере предполагалось, что все n элементов различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае комбинации с повторениями вычисляются по другим формулам. Например, если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и т.д., то число перестановок с повторениями рассчитывается по формуле

$$P_n(n_1, n_2, \dots) = \frac{n!}{(n_1! \cdot n_2! \cdot \dots)},$$

где $n_1 + n_2 + \dots = n$.

Пример. Сколько комбинаций из трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 2, т.е комбинаций с повторениями

$$P_3(1, 2) = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3 \text{ (перечислить их)}$$

Пример 1. Сколько комбинаций из четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, если каждая цифра входит в комбинацию только один раз.

Решение. Искомое число трехзначных чисел равно

$$P_3 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Пример. Сколько комбинаций из четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 2, 2, т.е комбинаций с повторениями

$$P_4(1, 3) = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4 \text{ (перечислить их)}$$

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений определяется из выражения:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример. Пусть имеются четыре буквы А, В, С, D. Сколько размещений можно составить из четырех букв по две.

Решение. Искомое число комбинаций равно

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 12 \text{ (перечислить их)}$$

Пример. Сколько двухзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в комбинацию только один раз.

Решение. Искомое количество чисел равно

$$A_3^2 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \text{ (перечислить их)}$$

Пример. Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2.

Решение. Искомое число сигналов равно

$$A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$$

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются только составом элементов.

Число всех возможных сочетаний определяется из выражения:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример. Пусть имеются четыре буквы А, В, С, D. Сколько сочетаний можно составить из четырех букв по две.

Решение. Искомое число комбинаций равно

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 6 \text{ (перечислить их)}$$

Пример. Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей.

Решение. Искомое число способов равно

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = 45$$

Сформулируем два универсальных правила, применяемых при решении комбинаторных задач.

Правило произведения. Пусть требуется выполнить одно за другим какие-либо два действия. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, а второе действие n_2 способами, то оба действия могут быть выполнены $n_1 \times n_2$ способами.

Пример 5. Пусть в первом ящике 5 красных пронумерованных шаров, во втором 10 синих пронумерованных шаров.

Пусть А – действие, заключающееся в том, что мы взяли красный шар.

Пусть В – действие, заключающееся в том, что мы взяли синий шар.

Тогда оба действия могут быть выполнены $n_1 \times n_2 = 50$ способами.

Данное правило справедливо для любого конечного множества действий.

Пример. Какое количество шифров можно набрать на дипломате, содержащего 3 колесика и на каждом 10 цифр.

В данном примере необходимо выполнить три действия, по одному на каждом колесике. Количество способов выполнить каждое действие равно 10, следовательно все три действия могут быть выполнены $n_1 \times n_2 \times n_3 = 1000$ способами.

В случае, если дипломат содержит 4 колесика, то все четыре действия могут быть выполнены 10000 способами. Зная время набора одного шифра, можно посчитать за какое время можно гарантированно вскрыть дипломат.

Правило суммы.

Пусть требуется выполнить одно из двух действий, взаимно исключающих друг друга. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, а второе действие n_2 способами, то выполнить одно из этих двух действий можно $n_1 + n_2$ способами.

Для условий предыдущего примера можно посчитать, что одно из действий А или В, т.е. вытащить красный или синий шар можно выполнить $n_1 + n_2 = 15$ способами.

Рассмотрим некоторые задачи на определение вероятности событий с использованием основных формул и правил комбинаторики.

Пример. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наугад. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

Решение. Обозначим через А событие – набрана нужная цифра. Абонент мог набрать любую из 10 цифр, поэтому общее число возможных исходов равно 10. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Благоприятным для события А является лишь один исход, поскольку нужная цифра одна. Искомая вероятность равна отношению числа исходов благоприятных для события А к числу всех возможных исходов:

$$P(A)=1/10$$

Пример. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наугад. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение. Обозначим через В событие – набраны две нужные цифры. Количество возможных комбинаций набрать две цифры из десяти равно числу размещений из десяти цифр по две $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$. Т.о. общее число возможных исходов равно 90. Эти исходы несовместны, равновозможны и составляют полную группу событий. Событию В благоприятен лишь один исход. Искомая вероятность равна отношению числа исходов благоприятных для события В к числу всех возможных исходов:

$$P(B)=1/90$$

Пример. В урне 6 белых и 4 черных шаров. Из урны вынимаются два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

Решение. Обозначим через В событие – выбраны два белых шара. Количество возможных комбинаций выбрать два шара из десяти равно числу сочетаний из десяти шаров по два $C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{2 \cdot 8!} = 45$. Т.о. общее число возможных исходов равно 45. Эти исходы несовместны, равновозможны и составляют полную группу событий. Количество исходов, благоприятных событию В, равно числу сочетаний из шести белых шаров по два $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 4!} = 15$. Искомая вероятность равна отношению числа исходов благоприятных для события В к числу всех возможных исходов:

$$P(B)=15/45=1/3$$

Задание на самоподготовку.

Повторить материалы практического занятия и подготовиться к ответам на следующие вопросы:

- а) понятие – полная группа событий, примеры; понятие – несовместные события, примеры; понятие – равновозможные события, примеры;
- б) классическая формула определения вероятности события A , ее физический смысл;
- в) понятие – перестановка, формула, примеры; понятие – размещение, формула, примеры; понятие – сочетание, формула, примеры;
- г) правило произведения – формулировка, примеры;
- д) правило суммы – формулировка, примеры.

**Список литературы для углубленного изучения материалов
практического занятия**

1. Вентцель Е. С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения: учебное пособие. – М.: КНОРУС, 2010. – 480 с. [стр. 13 – 34].
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие. – М.: Юрайт, 2018. – 479 с. [стр. 17 – 30].